Mündliche Bachelorprüfung in Moderner Theoretischer Physik

Zusammenfassung/Übersicht

erstellt von Tizian Römer

Kontakt via E-Mail: tiroemer@yahoo.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theo D 2
- 1.1 Kommutieren bei gemeinsamen Eigenfunktionen 2
- 1.2 Ortsoperator in Impulsdarstellung 2
- 1.3 Eichinvarianz der Schrödingergleichung 2
- 1.4 Stark-Effekt 2
- 1.5 Harmonischer Oszillator 2
- 1.6 Zeemann-Effekt 2
- 1.7 Wahrscheinlichkeitsstrom 2
- 1.8 Drehimpuls in Kugelkoordinaten 2
- 1.9 Impulsoperator in Ortsdarstellung 2
- 1.10 Postulate der Quantenmechanik 3
- 1.11 Ehrenfest-Theorem 3

2 Theo E 4
- 2.1 Dirac-Gleichung mit EM-Feld 4
- 2.2 Relativistische Korrekturen 4
- 2.3 Darwin-Term 4
- 2.4 Lorentztransformation von Spinoren 4
- 2.5 Formen der Dirac-Gleichung 5
- 2.6 Zeitabhängige Störungstheorie 5
- 2.7 Fermis Goldene Regel 5
- 2.8 Ebene-Wellen-Lösungen der Dirac-Gleichung 5
- 2.9 Hyperfeinstruktur 5
- 2.10 Vielteilchensysteme 5
- 2.11 Infinitesimale Lorentz-Transformation 6
- 2.12 Wahrscheinlichkeitsstrom 6

3 Theo F 7
- 3.1 Bose-Einstein-/Fermi-Dirac-Verteilung 7
- 3.2 Plancksches Strahlungsgesetz 7
- 3.3 Legendre Transformation 7
- 3.4 Thermodynamik im großkanonischen Ensemble 7

4 Streutheorie 8
- 4.1 Lippmann-Schwinger-Gleichung 8
- 4.2 Streuamplitude 8
- 4.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt 8
- 4.4 Bornsche Näherung 8
- 4.5 Rotationssymmetrische Potentiale 8
- 4.6 Yukawa- und Coulomb-Potential 9
- 4.7 Mott-Streuung 9
- 4.8 Partialwellenentwicklung 9

1 Theo D

1.1 Kommutieren bei gemeinsamen Eigenfunktionen

Zwei Operatoren O, P kommutieren, $[O,P]=0$, dann gilt:

$$O\psi_n = o_n\psi_n \quad \Leftrightarrow \quad OP\psi_n = o_n P\psi_n \quad \Rightarrow \quad P\psi_n \sim \psi_n,$$

also haben O, P gemeinsame Eigenfunktionen.

1.2 Ortsoperator in Impulsdarstellung

Eigenfunktionen des Impulsoperators in Ortsdarstellung:

$$\langle x|p\rangle \sim e^{ipx/\hbar}.$$

Eigenwertgleichung des Ortsoperators in Impulsdarstellung:

$$\hat{x}\langle p|x\rangle = x\langle p|x\rangle \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = i\hbar\nabla_p.$$

1.3 Eichinvarianz der Schrödingergleichung

Hamiltonian unter minimaler Kopplung ($\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}/c$):

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + q\varphi.$$

Schrödingergleichung ist Eichinvariant unter

$$\vec{A} \to \vec{A} + \nabla f, \quad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \psi \to \psi e^{iqf/\hbar c}, \quad f \equiv f(\vec{x}, t).$$

Anpassung des Wahrscheinlichkeitsstroms:

$$\vec{j} \to \frac{\hbar}{2im}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{q}{mc}\vec{A}|\psi|^2.$$

1.4 Stark-Effekt

Beschreibt (Wasserstoff-)Atom im elektrischen Feld. Für den Grundzustand folgt der quadratische Stark-Effekt, für die entarteten höheren Zustände der lineare Stark-Effekt.

QUADRATISCHER STARK-EFFEKT (GRUNDZUSTAND):

Elektrisches Feld $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\vec{e}_z$ führt auf $V = -q\mathcal{E}z$.

1. Ordnung Störungstheorie mit $q=-e$:

$$e\mathcal{E}\,\langle 100|z|100\rangle \sim \int d^3r\, z\, e^{-2r/a_B} = 0.$$

1. Ordnung verschwindet, daher ist Korrektur $\sim \mathcal{E}^2$.

Für 2. Ordnung betrachte ($z = r\cos\theta = r\sqrt{4\pi/3}\,Y_{10}$)

$$\langle nlm|z|100\rangle \sim \int d\Omega\, Y_{lm}Y_{10}^* = \delta_{1l}\delta_{m0},$$

sodass

$$\Delta E_{100}^{(2)} = e^2\mathcal{E}^2 \sum_{n,l,m}\frac{|\langle nlm|z|100\rangle|^2}{E_1 - E_n} = e^2\mathcal{E}^2\sum_n \frac{|\langle n10|z|100\rangle|^2}{E_1-E_n}$$

$$\approx e^2\mathcal{E}^2\frac{|\langle 210|z|100\rangle|^2}{E_1-E_2} \sim \mathcal{E}^2.$$

LINEARER STARK-EFFEKT (ENTARTETE ORDNUNGEN):

$n=2$, entartete Störungstheorie, berechne Eigenwerte von

$$M_{nm} = e\mathcal{E}\,\langle n|z|m\rangle,$$

$$|1\rangle = |200\rangle, \quad |2\rangle = |2,1,-1\rangle, \quad |3\rangle = |210\rangle, \quad |4\rangle = |211\rangle.$$

Betrachte ($z = r\cos\theta$)

$$\langle n|z|n\rangle \sim \int_0^\pi d\theta\,\sin\theta\,|\psi_n|^2\cos\theta = \int_{-1}^1 d\cos\theta\,|\psi_n|^2\cos\theta = 0,$$

da $|\psi_n|^2$ stets gerade in $\cos\theta$ ist. Zudem:

$$\langle nlm|z|n'l'm'\rangle \sim \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i(m-m')\varphi} = 2\pi\delta_{mm'}.$$

Somit sind nur $M_{13}, M_{31} \neq 0$, die Eigenwerte ΔE der Matrix sind

$$\det(M - \Delta E\,\mathbb{I}) = \Delta E^2(\Delta E^2 - M_{13}^2) \overset{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta E = 0, 0, \pm M_{13}.$$

Es ist offensichtlich $M_{13} \sim \mathcal{E}$.

Zu $\Delta E = \pm M_{13}$ gehören die Eigenvektoren

$$(1,0,1,0)/\sqrt{2}, \quad (1,0,-1,0)/\sqrt{2},$$

d. h. die Eigenzustände des gestörten Systems sind

$$(|200\rangle \pm |210\rangle)/\sqrt{2} \quad \text{mit} \quad \Delta E = \pm M_{13} \quad \text{sowie}$$

$$|2,1,-1\rangle, |2,1,1\rangle \quad \text{mit} \quad \Delta E = 0.$$

Es zeigt sich, dass $M_{13} = -3e\mathcal{E}a_B < 0$, sodass $+M_{13} < -M_{13}$.

1.5 Harmonischer Oszillator

Hamiltonian:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right).$$

Mit

$$a^{1,\dagger} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x \pm \frac{i}{m\omega}p\right).$$

Grundzustand:

$$a|0\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\psi_0(x) = im\omega x\psi_0(x)$$

$$\Rightarrow \quad \psi_0(x) = Ae^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}.$$

Höhere Zustände:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}{a^\dagger}^n|0\rangle.$$

Zeitentwicklung für einen Anfangszustand $|\psi, 0\rangle$:

$$|\psi, t\rangle = \sum_n c_n(t)|n\rangle.$$

$$H|\psi,t\rangle = i\hbar\frac{\partial|\psi,t\rangle}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad c_m E_m = i\hbar\dot{c}_m.$$

1.6 Zeemann-Effekt

Wasserstoff-Hamiltonian mit schwachem, konstanten $\vec{B}$-Feld:

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + V \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{mc}\vec{p}\vec{A} + V = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{q}{2mc}\vec{B}\vec{L} + V$$

wobei verwendet wurde, dass

$$\vec{A} = \frac{1}{2}(\vec{B}\times\vec{r}) \quad \Rightarrow \quad \vec{p}\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B}(\vec{r}\times\vec{p}) = \frac{1}{2}\vec{B}\vec{L}.$$

Die Energien für $\vec{B} = B\vec{e}_z$ sind dann

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{q}{2mc}BL_z \quad \Rightarrow \quad E_{nm} = -\frac{R_0}{n^2} - \frac{q\hbar B}{2mc}m_l.$$

1.7 Wahrscheinlichkeitsstrom

Damit die Wahrscheinlichkeit $\rho = |\psi|^2$ erhalten ist, sollte eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t\rho + \nabla\vec{j} = 0$ gelten:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} + \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}(\psi^* H\psi - \psi H\psi^*)$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\nabla(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) \overset{!}{=} -\nabla\vec{j}.$$

Damit ist Wahrscheinlichkeit erhalten, wenn ψ im unendlichen verschwindet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int d^3x\,\rho = -\int d^3x\,\nabla\vec{j} = -\oint d\vec{A}\,\vec{j} = 0.$$

1.8 Drehimpuls in Kugelkoordinaten

Aus $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$ folgt etwa $L_x = -i\hbar(y\partial_z - z\partial_y)$. Ableitung in Kugelkoordinaten:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad \text{etc.}$$

Zum Beispiel ist

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\arccos\frac{z}{r} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{z}{r}\right)^2}}\frac{z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{r^2-z^2}}\frac{yz}{r^2}$$

$$= \frac{r^2\sin\theta\cos\theta\sin\varphi}{r^3\sin\theta} = \frac{\cos\theta\sin\varphi}{r}.$$

Damit folgt dann letztlich

$$\nabla^2 = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r\right)^2 - \frac{\vec{L}^2}{r^2\hbar^2}.$$

1.9 Impulsoperator in Ortsdarstellung

$$\langle\vec{p}\rangle = \int\frac{d^3p}{2\pi}\psi_p^*\,\vec{p}\,\psi_p = \int\frac{d^3p}{2\pi}\psi_p^*\,\vec{p}\int d^3x\,e^{-i\vec{p}\vec{x}}\psi_x$$

$$= \int\frac{d^3p}{2\pi}\psi_p^*\int d^3x\,(i\nabla e^{-i\vec{p}\vec{x}})\psi_x$$

$$= -i\int\frac{d^3p}{2\pi}d^3x'\,e^{i\vec{p}\vec{x}'}\psi_{x'}^*\int d^3x\,e^{-i\vec{p}\vec{x}}\nabla\psi_x = -i\int d^3x\,\psi_x^*\nabla\psi_x$$

1.10 Postulate der Quantenmechanik

Ein Zustand wird durch normierte, komplexe Wellenfunktion beschrieben. Die Dynamik ist durch die Schrödingergleichung gegeben. Physikalische Größen werden durch hermitesche Operatoren beschrieben, deren Eigenwerte gemessen werden können.

1.11 Ehrenfest-Theorem

Zeitableitung eines Erwartungswerts:

$$\begin{aligned}\frac{d\langle\hat{O}\rangle}{dt} &= \frac{d}{dt}\int dx\, \psi^*\hat{O}\psi = \frac{1}{i\hbar}\int dx\, \left(-(H\psi^*)\hat{O}\psi + \psi^*\hat{O}H\psi\right)\\ &= \frac{1}{i\hbar}\int dx\, \left(-\psi^* H\hat{O}\psi + \psi^*\hat{O}H\psi\right) = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{O},H]\rangle.\end{aligned}$$

Damit folgen die Erwartungswerte den klassischen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{d\langle\vec{p}\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[p,H]\rangle = -\frac{i\hbar}{i\hbar}(\nabla V) = \vec{F}$$

2 Theo E

2.1 Dirac-Gleichung mit EM-Feld

PAULI-GLEICHUNG:
Gemäß minimaler Kopplung $p_\mu \to p_\mu - qA_\mu$ wird die Dirac-Gleichung zu

$$(\not{p} - m)\psi(x) \to (\not{p} - q\not{A} - m)\psi(x) = (i\not{D} - m)\psi(x).$$

Die Gesamtenergie ist $E = m + E_S$ mit der Schrödingergleichung-Energie E_S. Man macht den Ansatz

$$\psi(x) = e^{-imt}\begin{pmatrix}\varphi(x)\\ \chi(x)\end{pmatrix} = e^{-imt}e^{-iE_St}\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x})\\ \chi(\vec{x})\end{pmatrix}.$$

Einsetzen in die Dirac-Gleichung liefert ($V := q\phi$)

$$i\dot{\varphi} = q\phi\varphi + \vec{\sigma}\vec{\pi}\chi,$$
$$i\dot{\chi} - q\phi\chi = (E_S - V)\chi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi - 2m\chi,$$

wobei ϕ das Skalarpotential ist ($A_\mu = (\phi, \vec{A})$) sowie

$$\vec{\pi} := -i\nabla - q\vec{A} = \vec{p} - q\vec{A}.$$

Für $m \gg E_S, V$ kann man die letzte Gleichung nähern als

$$\chi \approx \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{2m}\varphi \qquad \Longrightarrow \qquad i\dot{\varphi} \approx q\phi\varphi + \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\varphi.$$

Man kann nun zeigen, dass

$$(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{\pi}^2 - q\vec{\sigma}\vec{B}, \qquad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

gilt. Damit folgt die Pauli-Gleichung ($\vec{s} = \vec{\sigma}/2$):

$$i\dot{\varphi} \approx \frac{\vec{\pi}^2}{2m}\varphi - \frac{q}{2m}2\vec{s}\vec{B}\varphi + q\phi\varphi.$$

Für ein schwaches homogenes Magnetfeld mit $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{r}/2$ folgt

$$\vec{\pi}^2 \approx \vec{p}^2 - \frac{q}{2}\left(\vec{p}(\vec{B} \times \vec{r}) + (\vec{B} \times \vec{r})\vec{p}\right) = \vec{p}^2 - q\vec{B}(\vec{r} \times \vec{p})$$
$$= \vec{p}^2 - q\vec{B}\vec{L}$$

(in Indexschreibweise sieht man, dass $\vec{p}(\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{B}(\vec{r} \times \vec{p})$, obwohl $\vec{p}$ eine Ableitung nach $\vec{r}$ beinhaltet). Somit folgt

$$i\dot{\varphi} \approx \frac{\vec{p}^2}{2m}\varphi - \frac{q}{2m}(\vec{L} + 2\vec{s})\vec{B}\varphi + q\phi\varphi.$$

2.2 Relativistische Korrekturen

Für $\vec{A} = 0$ ($\vec{\pi} = \vec{p}$) folgt $(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2 = \vec{p}^2$. Vernachlässigt man $E_S - V$ nicht, sondern nähert für $E_S - V \ll m$ folgt

$$\chi = \frac{1}{2m}\frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{1 + (E_S - V)/2m}\varphi \approx \frac{1}{2m}\left(1 - \frac{E_S - V}{2m}\right)\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi.$$

Aus $\dot{\varphi} = -iE_S\varphi$ folgt aus $i\dot{\varphi} = q\phi\varphi + \vec{\sigma}\vec{\pi}\chi$ ($V := q\phi$)

$$(E_S - V)\varphi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\chi = \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{2m}\left(1 - \frac{E_S - V}{2m}\right)\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi$$
$$= \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^2}{2m}\varphi - \frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{4m^2}(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi.$$

Nun gilt ($\vec{\pi} = \vec{p}$)

$$(E_S - V)\vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi = \vec{\sigma}\vec{\pi}\underbrace{(E_S - V)\varphi}_{=(\vec{\sigma}\vec{p})^2\varphi/2m+\cdots} + \vec{\sigma}\underbrace{[E_S - V, \vec{p}]}_{=-i(\nabla V)}\varphi.$$

Somit folgt ($(\vec{\sigma}\vec{p})^2 = \vec{p}^2$)

$$(E_S - V)\varphi \approx \frac{\vec{p}^2}{2m}\varphi - \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{4m^2}\left(\frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^3}{2m} - i\vec{\sigma}(\nabla V)\right)\varphi$$
$$\Leftrightarrow \quad E_S\varphi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{(\vec{\sigma}\vec{\pi})^4}{8m^3} + \frac{i}{4m^2}\sigma_i\sigma_j p_i(\nabla V)_j\right)\varphi$$
$$= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} + \frac{(\nabla V \times \vec{p})\vec{\sigma}}{4m^2} + \frac{i}{4m^2}\vec{p}(\nabla V)\right)\varphi,$$

wobei $\sigma_i\sigma_j = i\epsilon_{ikj}\sigma_k + \delta_{ij}$ verwendet wurde. Für ein Zentralpotential folgt mit $\nabla V = dV/dr\,\vec{r}/r$ Spin-Bahn-Kopplung:

$$\frac{(\nabla V \times \vec{p})\vec{\sigma}}{4m^2} = \frac{\vec{L}\vec{s}}{2m^2 r}\frac{dV}{dr}.$$

2.3 Darwin-Term

Im letzten Term folgt mit der Produktregel

$$\vec{p}(\nabla V) \sim (\nabla^2 V) + (\nabla V)\nabla$$

und ∇ ist nicht hermitesch. Mit $\chi \approx \vec{\sigma}\vec{\pi}\varphi/2m$ folgt für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\psi^\dagger\psi = \varphi^\dagger\varphi + \chi^\dagger\chi \approx \varphi^\dagger\varphi + \varphi^\dagger\left(\frac{\vec{\sigma}\vec{\pi}}{2m}\right)^2\varphi \approx \left|\left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right)\varphi\right|^2.$$

Für $|\phi|^2$ ist die Wahrscheinlichkeitsinterpretation okay, wobei

$$\phi = \Omega\varphi := \left(1 + \frac{\vec{p}^2}{8m^2}\right)\varphi \quad \Longrightarrow \quad \Omega^{-1} = 1 - \frac{\vec{p}^2}{8m^2}.$$

Sei $H_\varphi\varphi = E_S\varphi$ sowie $H\phi = E_S\phi$. Gesucht ist H. Damit folgt

$$E_S\phi = \Omega H_\varphi\Omega^{-1}\phi = H_\varphi\phi + \left[\frac{\vec{p}^2}{8m^2}, H_\varphi\right]\phi = H_\varphi\phi + \frac{1}{8m^2}[\vec{p}^2, V]\phi,$$

wobei $H_\varphi \approx \vec{p}^2/2m + V + \mathcal{O}(m^{-2})$ genähert wurde. Somit folgt

$$H - H_\varphi = -\frac{1}{8m^2}[\nabla^2, V] = -\frac{1}{8m^2}\left((\nabla^2 V) + 2(\nabla V)\nabla\right).$$

Somit folgt

$$H\phi = \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} + \frac{(\nabla V \times \vec{p})\vec{\sigma}}{4m^2} + \frac{1}{4m^2}\left((\nabla^2 V) + (\nabla V)\nabla\right)\right)\phi$$
$$- \frac{1}{8m^2}\left((\nabla^2 V) + 2(\nabla V)\nabla\right)\phi$$
$$= \left(\frac{\vec{p}^2}{2m} + V - \frac{\vec{p}^4}{8m^3} + \frac{(\nabla V \times \vec{p})\vec{\sigma}}{4m^2} + \frac{1}{8m^2}(\nabla^2 V)\right)\phi.$$

Für das Coulomb-Potential ist

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 4\pi\delta(x).$$

2.4 Lorentztransformation von Spinoren

Dirac-Gleichung sollte lorentzinvariant sein:

$$(i\not{\partial} - m)\psi(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (i\not{\partial}' - m)\psi'(x') = 0,$$

wobei $x' = \Lambda x$. Gesucht ist lineare Abbildung

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\psi(x) = S(\Lambda)\psi(\Lambda^{-1}x')$$

mit

$$S(\Lambda_1\Lambda_2) = S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) \quad \Longrightarrow \quad S(\mathbb{I}) = \mathbb{I}, \quad S(\Lambda^{-1}) = S^{-1}(\Lambda).$$

Konstruiere $S(\Lambda)$ aus Dirac-Gleichung:

$$0 = S(\Lambda)(i\not{\partial} - m)S(\Lambda^{-1})\psi'(x')$$
$$= S(\Lambda)\left(iS(\Lambda)\gamma^\mu S(\Lambda^{-1})\Lambda^\nu{}_\mu\partial'_\nu - m\right)\psi'(x').$$
$$\Longrightarrow \quad \gamma^\mu\Lambda^\nu{}_\mu \overset{!}{=} S(\Lambda^{-1})\gamma^\nu S(\Lambda).$$

Ansatz für $\Lambda^\nu{}_\mu = g^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu$:

$$S(\Lambda) = 1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta} \quad \Longrightarrow \quad S(\Lambda^{-1}) = 1 + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}.$$

Da ω antisymmetrisch ist, folgt

$$\gamma^\mu\left(g^\nu{}_\mu + \omega^\nu{}_\mu\right) \overset{!}{=} \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)\gamma^\nu\left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad \gamma^\mu\omega^\nu{}_\mu \approx \frac{i}{4}\omega^{\alpha\beta}[\sigma_{\alpha\beta}, \gamma^\nu]$$

Dies ist mit $\sigma_{\alpha\beta} = i[\gamma_\alpha, \gamma_\beta]/2$ erfüllt:

$$\gamma^\mu\omega^\nu{}_\mu$$
$$\approx -\frac{1}{8}\omega^{\alpha\beta}\left([[\gamma_\alpha, \gamma_\beta], \gamma^\nu] + \gamma_\alpha\gamma^\nu\gamma_\beta - \gamma_\beta\gamma^\nu\gamma_\alpha - \gamma_\alpha\gamma^\nu\gamma_\beta\right.$$
$$\left.+ \gamma_\beta\gamma^\nu\gamma_\alpha\right) = -\frac{1}{4}\omega^{\alpha\beta}\left(g^\nu{}_\beta\gamma_\alpha - g^\nu{}_\alpha\gamma_\beta - g^\nu{}_\alpha\gamma_\beta + g^\nu{}_\beta\gamma_\alpha\right)$$
$$= -\frac{1}{4}\left(\omega^{\alpha\nu}\gamma_\alpha - \omega^{\nu\beta}\gamma_\beta - \omega^{\nu\beta}g^\nu{}_\alpha\gamma_\beta + \omega^{\alpha\nu}g^\nu{}_\beta\gamma_\alpha\right).$$

Für endliche Transformationen folgt

$$S(\Lambda) = \exp\left(-i\omega^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}/4\right).$$

2.5 Formen der Dirac-Gleichung

ADJUNGIERTE DIRAC-GLEICHUNG:
Adjungieren der Dirac-Gleichung $(i\not\partial - m)\psi(x) = 0$ liefert mit $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ und zuletzt durch Multiplikation mit $-\gamma^0$

$$0 = \psi^\dagger(x)\left(-i\overleftarrow{\not\partial}^\dagger - m\right) = \psi^\dagger(x)\left(-i\gamma^0\overleftarrow{\not\partial}\gamma^0 - m\gamma^0\gamma^0\right)$$
$$= \bar\psi(x)\left(-i\overleftarrow{\not\partial} - m\right)\gamma^0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar\psi(x)\left(i\overleftarrow{\not\partial} + m\right) = 0.$$

LADUNGSKONJUGATION:
Für $(\not p - q\not A - m)\psi = 0$ ergibt sich mit kompl. Konj.

$$\left(-(p_\mu + qA_\mu)\gamma^{\mu *} - m\right)\psi^* = 0.$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(-(p_\mu + qA_\mu)C\gamma^{\mu *} - Cm\right)C^{-1}C\psi^* = 0.$$

Wenn $C\gamma^{\mu *}C^{-1} = -\gamma^\mu$, so erfüllt $\psi_c := C\psi^*$ eine Dirac-Gleichung mit $q \to -q$. $C = i\gamma^2$ funktioniert:

$$C\gamma^{\mu *}C^{-1} = -\gamma^2\gamma^{\mu *}\gamma^2 = \begin{cases} \gamma^2\gamma^2\gamma^2 & \mu = 2 \\ -\gamma^2\gamma^\mu\gamma^2 & \text{sonst} \end{cases} = -\gamma^\mu.$$

2.6 Zeitabhängige Störungstheorie

SCHRÖDINGERGLEICHUNG IM WECHSELWIRKUNGSBILD:

$$H_0|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad |n,t\rangle = e^{-iH_0t/\hbar}|n\rangle,$$
$$|\alpha,t\rangle_S = e^{-iH_0t/\hbar}\sum_n c_n(t)|n\rangle, \quad |\alpha,t\rangle_I := e^{iH_0t/\hbar}|\alpha,t\rangle_S.$$

Es folgt

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\alpha,t\rangle_I = -H_0|\alpha,t\rangle_I + e^{iH_0t/\hbar}(H_0 + \mathcal{V})|\alpha,t\rangle_S$$
$$= e^{iH_0t/\hbar}\mathcal{V}e^{-iH_0t/\hbar}|\alpha,t\rangle_I = \mathcal{V}_I|\alpha,t\rangle_I.$$

DIFFERENTIALGLEICHUNG FÜR KOEFFIZIENTEN:
Benutze $|\alpha,t\rangle_I = \sum_n c_n(t)|n\rangle$ und multipliziere SG mit $\langle m|$:

$$i\hbar\dot c_m = \sum_n c_n\langle m|\mathcal{V}_I|n\rangle = \sum_n c_n e^{i\omega_{mn}t}\mathcal{V}_{mn}.$$

mit $\omega_{mn} = (E_m - E_n)/\hbar$ und $\mathcal{V}_{mn} = \langle m|\mathcal{V}|n\rangle$.

DYSON-REIHE:
Zeitentwicklungsoperator:

$$|\alpha,t\rangle_I = U_I(t,t_0)|\alpha,t_0\rangle_I \quad \Rightarrow \quad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}U_I(t,t_0) = \mathcal{V}_I(t)U_I(t,t_0).$$

Integration mit RB $U_I(t_0,t_0) = 1$:

$$U_I(t,t_0) = 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t dt'\,\mathcal{V}_I(t')U_I(t',t_0).$$

Rekursion liefert $\quad U_I(t,t_0)$

$$\approx 1 + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t dt'\mathcal{V}_I(t') + \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^t dt'\mathcal{V}_I(t')\int_{t_0}^{t'} dt''\mathcal{V}_I(t'')U_I(t'',t_0)$$

ÜBERGANGSAMPLITUDEN:
Sei ein Zustand nun bei $t = t_0$ im Eigenzustand $|i\rangle$ von H_0. Dann gilt zur Zeit t:

$$\sum_n c_m|m\rangle = |i,t\rangle_I = U_I(t,t_0)|i,t_0\rangle_I = U_I(t,t_0)|i\rangle.$$

Multiplikation mit $\langle n|$ liefert:

$$c_n = \langle n|U_I(t,t_0)|i\rangle$$
$$= \delta_{ni} + \frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^t dt' e^{i\omega_{ni}t'}\mathcal{V}_{ni}(t')$$
$$+ \frac{1}{(i\hbar)^2}\int_{t_0}^t dt'\int_{t_0}^{t'} dt''\sum_m e^{i\omega_{nm}t'}e^{i\omega_{mi}t''}\mathcal{V}_{nm}(t')\mathcal{V}_{mi}(t'').$$

2.7 Fermis Goldene Regel

Plötzliche konstante Störung

$$\mathcal{V}(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 = 0 \\ V, & t \geq t_0 = 0 \end{cases}$$

liefert für $n \neq i$

$$c_n \approx \frac{V_{ni}}{i\hbar}\int_0^t dt' e^{i\omega_{ni}t'} = \frac{V_{ni}}{i\hbar}\frac{e^{i\omega_{ni}t} - 1}{i\omega_{ni}}$$
$$= -\frac{2iV_{ni}}{\hbar\omega_{ni}}e^{i\omega_{ni}t/2}\sin\omega_{ni}t/2$$
$$\Rightarrow \quad |c_n|^2 \approx \frac{|V_{ni}|^2}{\hbar^2}\frac{\sin^2\omega_{ni}t/2}{(\omega_{ni}t/2)^2}t^2 \xrightarrow{t\to\infty} \frac{2\pi t}{\hbar^2}|V_{ni}|^2\delta(\omega_{ni}).$$

Summe über alle Zustände mit $E_n \approx E_i$ gibt Übergangs*rate*:

$$w_{i\to[n]} = \int dE_n\,\rho(E_n)\frac{2\pi}{\hbar^2}|V_{ni}|^2\delta(\omega_{ni}) = \frac{2\pi}{\hbar}|V_{ni}|^2\rho(E_i).$$

2.8 Ebene-Wellen-Lösungen der Dirac-Gleichung

Der Ansatz

$$\psi(x) = Ae^{\pm ipx}u(p)$$

liefert, eingesetzt in die Dirac-Gleichung,

$$0 = (\mp\not p - m)u = \left(\mp\begin{pmatrix} p^0 & -\vec\sigma\vec p \\ \vec\sigma\vec p & -p^0\end{pmatrix} - m\right)\begin{pmatrix} u_A \\ u_B\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (\mp p^0 - m)u_A \pm \vec\sigma\vec p u_B \\ \mp\vec\sigma\vec p u_A + (\pm p^0 - m)u_B\end{pmatrix}.$$

Dies entspricht den beiden Gleichungen

$$u_A = \mp\frac{\vec\sigma\vec p}{\mp p^0 - m}u_B, \qquad u_B = \pm\frac{\vec\sigma\vec p}{\pm p^0 - m}u_A,$$

woraus durch gegenseitiges Einsetzen

$$\left((p^0)^2 - \vec p^2 - m^2\right)u_{A,B} = 0$$

folgt. Für das untere wie obere Vorzeichen ergeben sich somit je zwei linear unabhängige Lösungen. Man wähle:

unteres Vz.:
$$u_A = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{\vec\sigma\vec p}{p^0 + m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$u_A = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_B = \frac{\vec\sigma\vec p}{p^0 + m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

oberes Vz.:
$$u_B = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{\vec\sigma\vec p}{p^0 + m}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$
$$u_B = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Rightarrow u_A = \frac{\vec\sigma\vec p}{p^0 + m}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

2.9 Hyperfeinstruktur

Sei $\vec I$ der Gesamtdrehimpuls des Kerns and $\vec J$ der Elektronen, so ist

$$\vec\mu_I = \frac{g_I e}{2m_p}\vec I$$

das magnetische Moment des Kerns. Sei $\vec B_J$ das magnetische Feld der Elektronen am Kernort, dann folgt mit $\vec F = \vec I + \vec J$

$$H_{HFS} = -\vec\mu_I\vec B_J = -\frac{g_I eB_J}{2m_p|\vec J|}\vec I\vec J = -\frac{g_I eB_J}{2m_p}\frac{\vec F^2 - \vec I^2 - \vec J^2}{2|\vec J|}.$$

Mit Störungstheorie folgt

$$E_{HFS} = -\frac{g_I eB_J\hbar}{2m_p}\frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{2\sqrt{J(J+1)}}.$$

Für das Wasserstoffatom mit $l = 0$ gilt $I = J = 1/2 \Rightarrow F = 0, 1$.

2.10 Vielteilchensysteme

Für ein System aus zwei identischen Teilchen sollte

$$|\psi(1,2)|^2 = |\psi(2,1)|^2 \quad \Rightarrow \quad \psi(1,2) = e^{i\phi}\psi(2,1);$$

in der Natur kommt allerdings nur $\psi(1,2) = \pm\psi(2,1)$ vor. Für Bosonen gilt das $+$,

$$\psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt2}\left(\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1)\right),$$

für Fermionen das $-$,

$$\psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt2}\left(\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)\right) = \frac{1}{\sqrt2}\begin{vmatrix}\psi_a(1) & \psi_b(1) \\ \psi_a(2) & \psi_b(2)\end{vmatrix}.$$

Für N Teilchen sorgt die Slater-Determinante

$$\psi(1,2,\ldots,N) = \frac{1}{\sqrt{N!}}\begin{vmatrix}\psi_1(1) & \psi_2(1) & \cdots & \psi_N(2) \\ \psi_1(2) & \psi_2(2) & \cdots & \psi_N(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_1(N) & \psi_2(N) & \cdots & \psi_N(N)\end{vmatrix}.$$

Bspw. ist im Grundzustand des Heliumatoms zwar die Wellenfunktion symmetrisch, aber die Spinnwellenfunktion antisymmetrisch:

$$\psi(1,2) = \frac{1}{\sqrt2}\psi(1)\psi(2)\left(\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)\right).$$

Hierbei ist α und β ein Spin-up- bzw. -down-Zustand.

2.11 Infinitesimale Lorentz-Transformation

Für eine Drehung um ω um die z-Achse folgt

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega & 0 \\ 0 & \omega & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für einen Boost in x-Richtung

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\omega & -\sinh\omega & 0 & 0 \\ -\sinh\omega & \cosh\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\approx g^{\mu}{}_{\nu} + \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ -\omega & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \cosh\omega &= \gamma = \frac{\gamma mc^2}{mc^2} = \frac{E}{mc^2} \\ \tanh\omega &= \beta = \frac{\gamma mvc}{\gamma mc^2} = \frac{|\vec{p}|c}{E} \end{aligned}$$

Für eine beliebige Boostrichtung $\hat{n}$ folgt daraus

$$\omega^{\alpha\beta} = \omega \begin{pmatrix} 0 & n_1 & n_2 & n_3 \\ -n_1 & 0 & 0 & 0 \\ -n_2 & 0 & 0 & 0 \\ -n_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & \hat{n}^T \\ -\hat{n} & 0 \end{pmatrix}$$

und somit, mit $\vec{\alpha} \coloneqq \gamma_0\vec{\gamma}$,

$$S(\Lambda) = e^{-\frac{i}{4}\sigma_{\alpha\beta}\omega^{\alpha\beta}} = e^{-\frac{i}{4}(\sigma_{0i}\omega^{0i}+\sigma_{i0}\omega^{i0})} = e^{\frac{1}{4}\omega\hat{n}[\gamma_0,-\vec{\gamma}]} = e^{-\frac{1}{2}\omega\hat{n}\vec{\alpha}}.$$

Es gilt

$$\hat{n}\vec{\alpha} = \hat{n}\gamma_0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \hat{n}\vec{\sigma} \\ \hat{n}\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\hat{n}\vec{\alpha})^2 = \begin{pmatrix} (\hat{n}\vec{\sigma})^2 & 0 \\ 0 & (\hat{n}\vec{\sigma})^2 \end{pmatrix} = 1$$

und somit folgt mit $\hat{n} = -\hat{p}$

$$S(\Lambda) = e^{\frac{1}{2}\omega\hat{p}\vec{\alpha}} = \cosh\omega/2 + \hat{p}\vec{\alpha}\sinh\omega/2.$$

Man beachte, dass man schreiben kann

$$\cosh\omega/2 = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}, \qquad \sinh\omega/2 = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\frac{|\vec{p}|c}{E+mc^2}.$$

2.12 Wahrscheinlichkeitsstrom

KLEIN-GORDON-GLEICHUNG:

$$0 = \psi^*\underbrace{(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi}_{=0} - \psi\underbrace{(\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\psi^*}_{=0}$$
$$= \psi^*\partial_\mu\partial^\mu\psi - \psi\partial_\mu\partial^\mu\psi^* = \partial_\mu(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*).$$

Somit ergibt sich, in Übereinstimmung mit dem klassischen Dreierstrom

$$j^\mu = \frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\partial^\mu\psi - \psi\partial^\mu\psi^*).$$

DIRAC-GLEICHUNG:

$$0 = -i\bar{\psi}\underbrace{(i\partial\!\!\!/ - m)\psi}_{=0} - i\underbrace{\bar{\psi}(i\overleftarrow{\partial\!\!\!/} + m)}_{=0}\psi = \bar{\psi}(\partial\!\!\!/ + \overleftarrow{\partial\!\!\!/})\psi = \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi).$$

Nimmt man als Viererstrom $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi = (\rho, \vec{j})$, folgt die übliche Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \partial_\mu j^\mu = \partial_t\rho - \nabla\vec{j} \quad \Longrightarrow \quad \rho = j^0 = \psi^\dagger\psi.$$

Dieser Strom transformiert sich wie ein Vierervektor:

$$j'^\mu = \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = \bar{\psi}S^{-1}\gamma^\mu S\psi = \bar{\psi}\Lambda^\mu{}_\nu\gamma^\nu\psi = \Lambda^\mu{}_\nu j^\nu.$$

3 Theo F

3.1 Bose-Einstein-/Fermi-Dirac-Verteilung

$$Z = \sum_{\text{Zust.}} e^{-\beta(E-\mu N)} = \sum_{n_1,n_2,\ldots=0}^{1,\infty} e^{-\beta\sum_\lambda(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda}$$
$$= \prod_\lambda \sum_{n_\lambda=0}^{1,\infty} e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} = \prod_\lambda \underbrace{\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}\right)^{\pm 1}}_{=:Z_\lambda}.$$

Mittlere Anzahl Teilchen im Zustand λ:

$$\langle n_\lambda\rangle = \frac{1}{Z_\lambda}\sum_{n_\lambda=0}^{1,\infty} n_\lambda\, e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)n_\lambda} = kT\frac{1}{Z_\lambda}\frac{\partial Z_\lambda}{\partial\mu}$$
$$= \pm kT\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}\right) = \frac{e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}}{1 \pm e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)}} = \frac{1}{e^{-\beta(\epsilon_\lambda-\mu)} \pm 1}.$$

3.2 Plancksches Strahlungsgesetz

Für Photonen ist die Teilchenzahl nicht erhalten $\Longrightarrow \mu = 0$:

$$E = \int d\epsilon \frac{\epsilon\, g(\epsilon)}{e^{\beta\epsilon}-1}.$$

Zustandsdichte mit $\epsilon = \hbar c k$:

$$\frac{GV}{(2\pi)^3}4\pi k^2\, dk = \frac{4\pi GV}{(2\pi\hbar c)^3}\epsilon^2\, d\epsilon.$$

Es folgt mit $\epsilon = \hbar\omega$

$$E = \frac{4\pi V G\hbar^4}{(2\pi\hbar c)^3}\int d\omega \frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{dE}{d\omega} = \frac{\hbar V G}{2\pi^2 c^3}\frac{\omega^3}{e^{\beta\hbar\omega}-1}.$$

Es ist $G = 2$ (zwei unabhängige Polarisationen).

3.3 Legendre Transformation

$U(S,V,N) \quad \Longrightarrow \quad dU = T\,dS - p\,dV + \mu\,dN$

$F(T,V,N) = U - TS$

$\quad \Longrightarrow \quad dF = dU - dT\,S - T\,dS = -S\,dT - p\,dV + \mu\,dN$

3.4 Thermodynamik im großkanonischen Ensemble

Entropie ist definiert als $S = k\ln\Omega$. Für Zustände mit Wahrscheinlichkeit W_n gilt

$$S = -k\sum_n W_n \ln W_n,$$

was für eine Gleichverteilung $W_n = 1/\Omega$ aufs selbe hinausläuft:

$$S = k\sum_n W_n \ln\Omega = k\ln\Omega.$$

Mit $W_n = Z^{-1}e^{-\beta\epsilon_n}$ folgt

$$S = k\sum_n W_n(\beta\epsilon_n + \ln Z) = k\beta U + k\ln Z.$$

Damit folgt für die freie Energie

$$F = U - TS = -kT\ln Z.$$

Für die Wärmekapazität gilt

$$c_V = \frac{\partial U}{\partial T} = T\frac{\partial S}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F}{\partial T^2}.$$

4 Streutheorie

4.1 Lippmann-Schwinger-Gleichung

ALLGEMEINE GLEICHUNG:
Der Hamiltonian setzt sich zusammen aus der kinetischen Energie der einlaufenden Teilchen H_0 und dem Streupotential V. Es soll

$$H_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \qquad H|\psi\rangle = (H_0+V)|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

gelten (elastische Streuung $\Longrightarrow$ gleiche Energien). Es folgt

$$\Leftrightarrow \quad (E-H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \quad \Leftrightarrow \quad |\psi\rangle = (E-H_0)^{-1}V|\psi\rangle + |\phi\rangle$$

Das $|\phi\rangle$ macht insofern Sinn, als dadurch $|\psi\rangle \to |\phi\rangle$ für $V \to 0$ und Multiplikation der Gleichung mit $E - H_0$ erneut die richtige Gleichung liefert. Da E auch Eigenwert von H_0 ist, führt $(E-H_0)^{-1}$ auf Singularitäten. Der Trick ist, in die komplexe Ebene auszuweichen,

$$|\psi\rangle = (E-H_0+i\epsilon)^{-1}V|\psi\rangle + |\phi\rangle.$$

Dies ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung.

GREENSCHE FUNKTION:
Die Wellenfunktion zu H_0, $|\phi\rangle$, entspricht einer ebenen Welle und ist somit gleich der Impulsoperatoreigenfunktion. In der Ortdarstellung gilt

$$\langle\vec{x}|\phi\rangle \sim e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar} \sim \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle.$$

Die Normierung A ist über

$$\delta(\vec{p}-\vec{p}\,') = \langle\vec{p}|\vec{p}\,'\rangle = \int d^3x\,\langle\vec{p}|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}|\vec{p}\,'\rangle = A\int d^3x\, e^{i(\vec{p}\,'-\vec{p})\vec{x}/\hbar}$$

$$= A(2\pi\hbar)^{3/2}\delta(\vec{p}-\vec{p}\,') \quad \Longrightarrow \quad \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{i\vec{p}\vec{x}/\hbar}$$

gegeben. Somit folgt aus der Lippmann-Schwinger-Gleichung

$$\begin{aligned}\langle\vec{x}|\psi\rangle &= \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle + \langle\vec{x}|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}V|\psi\rangle\\ &= \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle + \int d^3x'\langle\vec{x}|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}|\vec{x}\,'\rangle\langle\vec{x}\,'|V|\psi\rangle\\ &= \langle\vec{x}|\vec{p}\rangle + \int d^3x'\langle\vec{x}|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}|\vec{x}\,'\rangle V(\vec{x}\,')\psi(\vec{x}\,').\end{aligned}$$

Man berechne nun $\langle\vec{x}|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}|\vec{x}\,'\rangle$ in der Impulsbasis:

$$\begin{aligned}G(\vec{x}-\vec{x}\,') &\coloneqq \langle\vec{x}|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}|\vec{x}\,'\rangle\\ &= \int d^3p'd^3p''\langle\vec{x}|\vec{p}\,'\rangle\langle\vec{p}\,'|(E-H_0+i\epsilon)^{-1}|\vec{p}\,''\rangle\langle\vec{p}\,''|\vec{x}\,'\rangle\\ &= \int \frac{d^3p'd^3p''}{(2\pi\hbar)^3}e^{i\vec{p}\,'\vec{x}/\hbar}\frac{\delta(\vec{p}\,'-\vec{p}\,'')}{E-\vec{p}\,''^2/2m+i\epsilon}e^{-i\vec{p}\,''\vec{x}\,'/\hbar}\\ &= \int\frac{d^3p'}{(2\pi\hbar)^3}\frac{e^{i\vec{p}\,'(\vec{x}-\vec{x}\,')/\hbar}}{E-\vec{p}\,'^2/2m+i\epsilon} = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}\,'|},\end{aligned}$$

wobei sich das Integral über Kugelkoordinaten und Residuensatz lösen lässt. Die Lippmann-Schwinger-Gleichung in Ortsdarstellung lautet somit

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\vec{x}} - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3x'\frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{x}\,'|}}{4\pi|\vec{x}-\vec{x}\,'|}V(\vec{x}\,')\psi(\vec{x}\,')$$

4.2 Streuamplitude

Da $V(\vec{x}\,')$ für große $\vec{x}\,'$ klein ist, kann $\vec{x} \gg \vec{x}\,'$ angenommen werden. Mit dieser Näherung folgt

$$\begin{aligned}|\vec{x}-\vec{x}\,'| &= \sqrt{(\vec{x}-\vec{x}\,')^2} = \sqrt{r^2-2rr'\cos\alpha + r'^2}\\ &= r\sqrt{1-2r'/r\cos\alpha + r'^2/r^2} \approx r - r'\cos\alpha = |\vec{x}| - \frac{\vec{x}\vec{x}\,'}{|\vec{x}|}.\end{aligned}$$

Liegt der Koordinatenursprung im Streukörper so gilt für die gestreute Welle $\vec{k}\,' \parallel \vec{x}$, also $\vec{k}\,' = |\vec{k}|\,\vec{x}/|\vec{x}|$. Somit folgt $e^{ik|\vec{x}-\vec{x}\,'|} \approx e^{ik|\vec{x}|}e^{-ik\vec{x}\vec{x}\,'/|\vec{x}|} = e^{ik|\vec{x}|}e^{-i\vec{k}\,'\vec{x}\,'}$, also

$$\begin{aligned}\psi(\vec{x}) &\approx \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{i\vec{k}\vec{x}} - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e^{ik|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|}\int d^3x'e^{-i\vec{k}\,'\vec{x}\,'}V(\vec{x}\,')\psi(\vec{x}\,')\\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\left(e^{i\vec{k}\vec{x}} + f(\vec{k},\vec{k}\,')\frac{e^{ik|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\right),\end{aligned}$$

wobei zuletzt die Streuamplitude

$$\begin{aligned}f(\vec{k},\vec{k}\,') &= -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\int d^3x'\frac{e^{-i\vec{k}\,'\vec{x}\,'}}{(2\pi)^{3/2}}V(\vec{x}\,')\psi(\vec{x}\,')\\ &= -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\langle\vec{k}\,'|V|\psi\rangle\end{aligned}$$

definiert wurde.

4.3 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Um Experiment und Theorie einer Streuung zu vergleichen nutzt man den differentiellen Wirkungsquerschnitt,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Teilchenstrom in }(\theta,\varphi)\text{-Richtung}}{\text{einfallender Teilchenstrom}}\cdot|\vec{x}|^2,$$

wobei r die Entfernung zwischen dem Streukörper und dem Flächenelement in (θ,φ)-Richtung ist.
Der Teilchenstrom ist allgemein gegeben durch

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*),$$

in radialer Richtung beträgt er (verwende ∇ in Kugelkoord.)

$$\vec{e}_r\cdot\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial r} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial r}\right).$$

Für die auslaufende Kugelwelle folgt daraus

$$\vec{e}_r\cdot\vec{j}_f = \frac{\hbar k}{(2\pi)^3 m}\frac{|f|^2}{|\vec{x}|^2},$$

für die einlaufende ebene Welle hingegen

$$\vec{j}_i = \frac{\hbar\vec{k}}{(2\pi)^3 m}.$$

Der Wirkungsquerschnitt ist daher

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|\vec{e}_r\cdot\vec{j}_f|}{|\vec{j}_i|}|\vec{x}|^2 = |f|^2.$$

4.4 Bornsche Näherung

TRANSITION-OPERATOR:
Bisher lässt sich f nicht explizit berechnen. Man führt nur einen Transition-Operator T ein, der durch

$$V|\psi\rangle = T|\phi\rangle$$

definiert ist. Dadurch lässt sich die Lippmann-Schwinger-Gleichung – nach Multiplikation mit V – schreiben als

$$T|\phi\rangle = V|\phi\rangle + V(E-H_0+i\epsilon)^{-1}T|\phi\rangle$$

und da diese Gleichung für beliebige ebene Wellen $|\phi\rangle$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}T &= V + V(E-H_0+i\epsilon)^{-1}T\\ \Leftrightarrow \quad T &= (1-V(E-H_0+i\epsilon)^{-1})^{-1}V.\end{aligned}$$

Für die Übergangsamplitude aus 4.2 folgt mit $|\phi\rangle \mathrel{\widehat{=}} |\vec{k}\rangle$

$$f(\vec{k},\vec{k}\,') = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\langle\vec{k}\,'|T|\vec{k}\rangle.$$

BORNSCHE REIHE:
Um die Bornsche Reihe zu erhalten, setzt man die Entwicklung des Transition-Operators ($(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\cdots$)

$$T = (1-V(E-H_0+i\epsilon)^{-1})^{-1}V = V + V(E-H_0+i\epsilon)^{-1}V + \cdots$$

in die Formel für die Übergangsamplitude ein:

$$\begin{aligned}&f(\vec{k},\vec{k}\,')\\ &\quad = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{(2\pi)^3}{4\pi}\left(\langle\vec{k}\,'|V|\vec{k}\rangle + \langle\vec{k}\,'|V(E-H_0+i\epsilon)^{-1}V|\vec{k}\rangle + \cdots\right).\end{aligned}$$

Die Matrixelemente lassen sich z. B. in Ortsdarstellung ausrechnen:

$$\langle\vec{k}\,'|V|\vec{k}\rangle = \int d^3x\,\langle\vec{k}\,'|\vec{x}\rangle V(x)\langle\vec{x}|\vec{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3x\, e^{i(\vec{k}-\vec{k}\,')\vec{x}}V(x).$$

4.5 Rotationssymmetrische Potentiale

Für $V(\vec{x}) = V(r)$ folgt

$$\begin{aligned}\int d^3x\, e^{i\vec{q}\vec{x}}V(r) &= 2\pi\int_0^\infty dr\, r^2V(r)\int_{-1}^1 d\cos\theta\; e^{iqr\cos\theta}\\ &= \frac{4\pi}{q}\int_0^\infty dr\, rV(r)\sin qr\end{aligned}$$

und somit

$$\langle\vec{k}\,'|V|\vec{k}\rangle = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{4\pi}{|\vec{k}-\vec{k}\,'|}\int_0^\infty dr\, rV(r)\sin|\vec{k}-\vec{k}\,'|r.$$

Außerdem ist rein geometrisch

$$|\vec{k}-\vec{k}\,'| = 2k\sin\theta/2,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{k}$ und $\vec{k}\,'$ ist.

4.6 Yukawa- und Coulomb-Potential

Für das Yukawa-Potential
$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r}$$
folgt mit
$$\langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} V_0 \frac{1}{\left|\vec{k} - \vec{k}'\right|^2 + \mu^2}$$
und somit
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \left| -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle \right|^2 = \left(\frac{2mV_0/\hbar^2}{4k^2 \sin^2\theta/2 + \mu^2} \right)^2.$$
Für $\mu = 0$ und $V_0 = zZe^2/4\pi\epsilon_0$ erhält man den Wirkungsquerschnitt für das Coulomb-Potential:
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{mzZe^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{k^4 \sin^4\theta/2}.$$

4.7 Mott-Streuung

Streuung eines Spin-1/2-Teilchens an einem Teilchen ohne Spin mit Coulomb-Potential. Verwende statt $|\vec{k}\rangle$ die Ebene-Welle-Lösungen der Dirac-Gleichung $\psi(\vec{x}) = u_{p,s} e^{-ipx}$ $(p_0' = p_0)$
$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \langle \psi' | V | \psi \rangle \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \bar{u}_{p',s'} \gamma^0 u_{p,s} \int d^3x \, e^{-i(\vec{p}' - \vec{p})\vec{x}} V \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \bar{u}_{p',s'} \gamma^0 u_{p,s} \frac{V_0}{|\vec{p}' - \vec{p}|^2}. \end{aligned}$$
Vollständigkeit $\sum_s u_s \bar{u}_s = (\not{p} + m)/2m$ sowie
$$\left(\bar{u}_{p',s'} \gamma^0 u_{p,s} \right)^* = \left(u^\dagger_{p',s'} u_{p,s} \right)^\dagger = \bar{u}_{p,s} \gamma^0 u_{p',s'}$$
führt auf
$$\begin{aligned} |f|^2 &\sim \sum_{s,s'} \left(\bar{u}_{p',s'} \gamma^0 u_{p,s} \right) \left(\bar{u}_{p,s} \gamma^0 u_{p',s'} \right) \\ &= \sum_{s'} \bar{u}_{p',s'} \underbrace{\gamma^0 \frac{(\not{p} + m)}{2m} \gamma^0}_{=:Q} u_{p',s'} = \sum_{n,m,s'} Q_{nm} \left(u_{p',s'} \right)_m \left(\bar{u}_{p',s'} \right)_n \\ &= \sum_{n,m} Q_{nm} \left(\frac{\not{p}' + m}{2m} \right)_{mn} = \frac{1}{4m^2} \mathrm{Tr}\ \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0 (\not{p}' + m) \end{aligned}$$
und somit auf (Faktor 1/2: Mittelung über einfallende Spins)
$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 = \frac{V_0^2}{2\hbar^4 |\vec{p}' - \vec{p}|^4} \mathrm{Tr}\ (\not{p}' + m) \gamma^0 (\not{p} + m) \gamma^0.$$
Für die Spur folgt
$$\begin{aligned} \frac{1}{4m^2} \left(\mathrm{Tr}\, \not{p}' \gamma^0 \not{p} \gamma^0 + m^2\, \mathrm{Tr}\, \gamma^0 \gamma^0 \right) &= \frac{1}{4m^2} p'_\mu p_\nu\, \mathrm{Tr}\, \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^\nu \gamma^0 + 1 \\ &= \frac{1}{m^2} p'_\mu p_\nu \left(g^{\mu 0} g^{\nu 0} - g^{\mu\nu} g^{00} + g^{\mu 0} g^{\nu 0} \right) + 1 \\ &= \frac{1}{m^2} \left(2p'_0 p_0 - p'p \right) + 1. \end{aligned}$$
Mit $p_0 = p'_0 = E$ und
$pp' = E^2 - |\vec{p}|^2 \cos\theta = m^2 + \vec{p}^2(1 - \cos\theta) = m^2 + 2\vec{p}^2 \sin\theta/2$
folgt mit $|\vec{p} - \vec{p}'| = 2|\vec{p}| \sin\theta/2$ (wie in 4.5)
$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{4V_0^2}{\hbar^4 |\vec{p}' - \vec{p}|^4} \left(2E^2 - 2\vec{p}^2 \sin\theta/2 \right) \\ &= \frac{8E^2 V_0^2}{\hbar^4 16 |\vec{p}|^4 \sin^4\theta/2} \left(1 - \frac{\vec{p}^2}{E^2} \sin\theta/2 \right). \end{aligned}$$

ÜBER DIE VOLLSTÄNDIGKEIT:

Mit $\bar{u}_s u_{s'} = \delta_{ss'}$ und $\bar{u}_s v_{s'} = 0$ folgt
$$\sum_s u_s \bar{u}_s \begin{pmatrix} u_{s'} \\ v_{s'} \end{pmatrix} = \sum_s u_s \begin{pmatrix} \delta_{ss'} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{s'} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Außerdem gilt
$$(\not{p} - m) u_s = 0, \qquad (\not{p} + m) v_s = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\not{p} + m}{2m} \begin{pmatrix} u_{s'} \\ v_{s'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{s'} \\ 0 \end{pmatrix}.$$
Somit gilt
$$\sum_s u_s \bar{u}_s = \frac{\not{p} + m}{2m}.$$

4.8 Partialwellenentwicklung

Für ein kugelsymmetrisches Potential kann man $|\vec{k}\rangle$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln:
$$\langle \vec{k} | Elm \rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{mk}} \delta(E - \hbar^2 k^2 / 2m) Y_{lm}(\hat{k}).$$
Für ein kugelsymmetrisches Potential kommutiert T mit $\vec{L}^2$ und $\vec{L}$, dem Generator der Rotation. Somit ist er ein Skalaroperator:
$$\langle Elm | T | E'j'm' \rangle = \langle 0l'0m' | lm \rangle \langle El \| T \| E'l' \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} T_l(E),$$
wobei $m = m' + 0$ und $l = |l' - 0|, \dots, l' + 0$ verwendet wurde.
$$\begin{aligned} f(\vec{k}, \vec{k}') &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \langle \vec{k}' | T | \vec{k} \rangle \\ &= -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{(2\pi)^3}{4\pi} \sum_{l,m,l',m'} \int dE\, dE' \langle \vec{k}' | Elm \rangle \langle Elm | T | E'j'm' \rangle \langle E'l'm' | \vec{k} \rangle \\ &= -\frac{(2\pi)^2}{k} \sum_{l,m} T_l(E_k)\, Y_{lm}(\hat{k}') Y^*_{lm}(\hat{k}). \end{aligned}$$
Für $\hat{k} = \hat{z}$ folgt (für $m \neq 0$ ist $Y_{lm} \sim \sin^n\theta$)
$$Y^*_{lm}(\hat{k}) = Y^*_{lm}(\theta = 0) = \sqrt{(2l+1)/4\pi}\, \delta_{m0}.$$
Somit folgt, mit $Y_{lm} = \sqrt{(2l+1)/4\pi}\, P_l(\cos\theta)$,
$$f(\vec{k}', \vec{k}) = -\frac{\pi}{k} \sum_l (2l+1) T_l(E_k)\, P_l(\cos\theta).$$